

# Měření odporu rezistorů

**Úkol:** Proměřit sadu rezistorů s neznámým odporem různými metodami a porovnat přesnost jednotlivých měření.

**Potřeby:** Viz seznam v deskách u úlohy na pracovním stole.

## Obecná část:

Elektrický odpor rezistorů lze měřit různými metodami, což souvisí jednak s rozsahem hodnot měřených odporů a jednak s požadovanou přesností měření. V těchto metodách většinou používáme zapojení se zdroji konstantního stejnosměrného proudu v ustáleném stavu, ale lze použít i zdrojů střídavých proudů, což obvykle nevyžaduje žádné zásadní změny ve způsobu měření. Pouze při vyšších frekvencích střídavého proudu (zhruba nad 1 kHz) mohou přesnost výsledku negativně ovlivnit parazitní indukčnosti a kapacity měřených rezistorů i jiných částí obvodu.

Známe metody přímé, jež jsou založeny na bezprostřední aplikaci Ohmova zákona

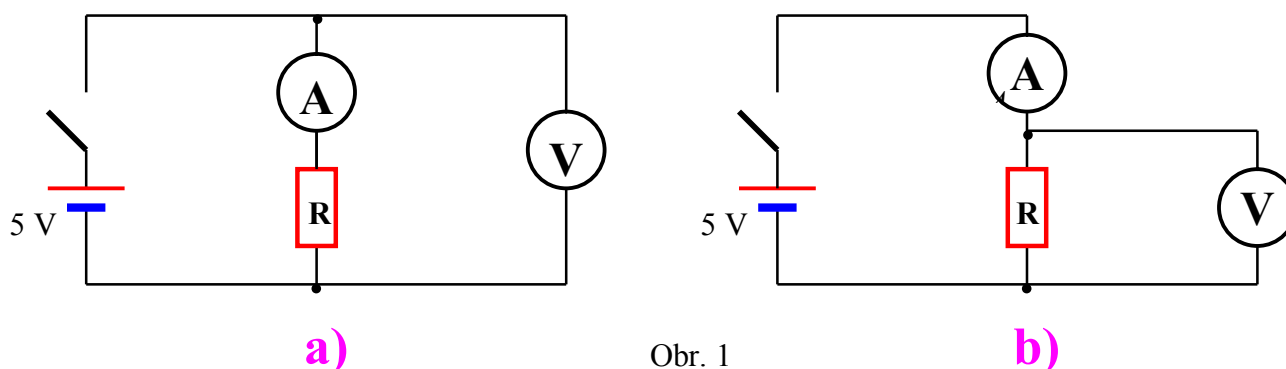
$$R = \frac{U}{I}, \quad (1)$$

a řadu nepřímých metod, jež k určení neznámého odporu používají v zásadě porovnání s jedním nebo více odpory známými. Jisté specifické postavení má nepřímá metoda měření velkých odporů vybíjením kondenzátoru přes měřený odpor, jež se provádí jako samostatná laboratorní úloha.

## I. Přímé metody

Elektrický odpor rezistoru můžeme určit z Ohmova zákona (1), změříme-li proud  $I$  protékající rezistorem o hledaném odporu  $R$  při odpovídajícím napětí  $U$  mezi svorkami rezistoru. Musíme si však uvědomit, že přístroje, jimiž měříme proud a napětí (ampérmetr a voltmetr), však vždy do jisté míry ovlivňují svými vlastními vnitřními odpory  $R_A$  resp.  $R_V$  velikosti obou zmíněných veličin v obvodu, a získaný výsledek – odpor  $R$  rezistoru – je tak vždy pouze přibližný.

Při zapojení přístrojů do obvodu lze v zásadě užít dva různé způsoby (viz následující obr. 1):



Obr. 1

V zapojení podle obr. 1a) měříme správně proud, ale dopouštíme se určité nepřesnosti při měření napětí (to neměříme na svorkách rezistoru, ale na celé sériové kombinaci rezistor – ampérmetr). Metoda tak dává výsledek o něco vyšší, než je hodnota měřeného odporu.

V případě zapojení obvodu podle obr. 1b) je tomu naopak – správně je tentokrát měřena hodnota napětí na svorkách rezistoru, ale ampérmetr ukazuje celkový proud protékající paralelní kombinací měřený rezistor - voltmetr. Tudíž tato metoda dává naopak výsledek o něco menší, než je skutečná hodnota měřeného odporu.

Známe-li vnitřními odpory  $R_A$  resp.  $R_V$  použitých přístrojů, lze jednoduchým výpočtem (ten si proveďte sami!) zjistit, že správná hodnota odporu  $R$  rezistoru v zapojení podle obr. 1a) je dána výrazem

$$R = \frac{U}{I} - R_A \quad , \quad (2)$$

kde  $R_A$  je odpor ampérmetru. A podobně v případě zapojení podle obr. 1b) bude hledaný odpor  $R$  vyjádřen výrazem

$$R = \frac{1}{\frac{I}{U} - \frac{1}{R_V}} \quad , \quad (3)$$

kde  $R_V$  je odpor voltmetru.

Obecně platí, že odpor ampérmetru  $R_A$  je velmi malý (ampérmetr také proto připojujeme do obvodu sériově), zatímco odpor voltmetru  $R_V$  bývá naopak vysoký (a tento měřicí přístroj zařazujeme do obvodu paralelně k měřenému prvku). Z těchto skutečností vyplývá, že zapojení podle obr. 1a) je vhodnější pro měření větších odporů, kdy lze ve výrazu (2) zanedbat vnitřní odpor ampérmetru  $R_A$  ( $R_A \ll R$ ). Zapojení podle obr. 1b) je zase vhodnější pro odpory menší, kdy lze v takovém případě ve jmenovateli výrazu (3) zanedbat převrácenou hodnotu vnitřního odporu voltmetru  $1/R_V$ . Vztahy (2) a (3) tak přejdou zpět v jednoduchý matematický tvar Ohmova zákona

$$R = \frac{U}{I} \quad . \quad (1)$$

Použijeme-li u přímé metody tohoto přístupu, dopouštíme se sice určité nepřesnosti, ale je si třeba také uvědomit, že i samotné měřicí přístroje měří s jistou chybou (mají vždy danou třídu přesnosti), což může do jisté míry naše zjednodušení vztahů (2) a (3) kompenzovat.

Na přímé metodě je též založeno měření elektrického odporu rezistoru ohmmetrem. Tento přístroj je v podstatě ampérmetr, jenž měří proud protékající rezistorem o neznámém odporu  $R_x$ , přičemž zdroj napětí  $U$  (obvykle baterie) je už v přístroji zabudován. Údaj na displeji přístroje je pak uváděn přímo v ohmech. Ohmmetry obvykle slouží k rychlému měření nevyžadujícímu příliš velkou přesnost.

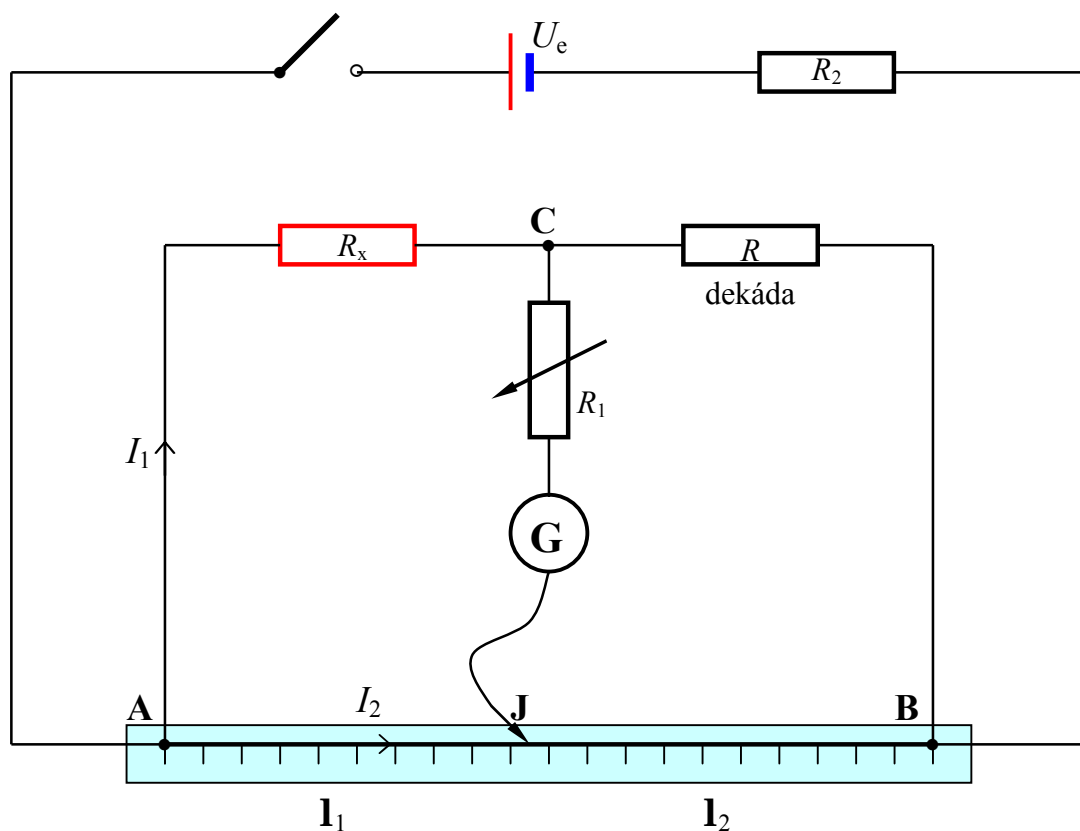
## II. Nepřímé metody

Mezi nejběžnější nepřímé metody měření elektrického odporu patří např. metoda substituční, srovnávací či můstková. Nejdůležitější a nejčastěji používanou je můstková metoda, jíž lze využít nejen pro měření odporu rezistorů, ale i pro měření jiných prvků elektrických obvodů (např. kapacit a indukčností ve střídavých můstcích – viz příslušné laboratorní úlohy). Touto metodou lze obvykle získat též nejpřesnější výsledky. Princip můstkového zapojení je na obrázku 2.

Jedná se vlastně o zapojení čtyř rezistorů - měřeného s neznámým odporem  $R_x$ , dekády, jejíž odpor  $R$  můžeme libovolně nastavit, a dvou částí odporového drátu upevněného mezi body **A** a **B**. Ten je na dvě části rozdělen pohyblivým jezdcem **J**, přičemž jejich délky jsou

$$l_1 = |AJ| \quad \text{a} \quad l_2 = |BJ| \quad .$$

Elektrické odpory těchto částí drátu označme  $R_A$ , resp.  $R_B$ . V prostřední větvi můstku **CJ** je zapojen galvanometr, jenž měří proud procházející touto větví a indikuje, zda můstek je či není v tzv. rovnováze. Sériově připojeným proměnným odporem  $R_1$  lze měnit pouze velikost výchylky galvanometru, a tím zvyšovat či snižovat citlivost měření.



Obr. 2

Můstek bude v rovnováze tehdy, když při posouvání jezdce **J** po odporovém drátu dosáhneme nulové výchylky na galvanoměru **G**. V tomto okamžiku se prostřední větev můstku děje v obvodu vlastně neúčastní.

Tím pádem proud  $I_1$  protékající měřeným odporem  $R_x$  protéká také beze změny dekadou s odporem  $R$  a proud  $I_2$ , jenž teče spodní větví můstku (tedy odporovým drátem), má také stejnou velikost v obou délkách  $\mathbf{I}_1$  a  $\mathbf{I}_2$ .

Navíc ze skutečnosti, že mezi body **C** a **J** neteče proud, vyplývá, že oba mají stejný elektrický potenciál. Tudíž napětí na rezistoru s neznámým odporem  $R_x$  musí být stejné jako je napětí na levé části odporového drátu  $\mathbf{I}_1$  a podobně napětí na dekádě  $R$  má stejnou velikost jako napětí pravé části odporového drátu  $\mathbf{I}_2$ .

Podle Ohmova zákona tak musí platit vztahy

$$\begin{aligned} R_x I_1 &= R_A I_2 && \text{pro levou polovinu můstku a} \\ R I_1 &= R_B I_2 && \text{pro jeho pravou půlku.} \end{aligned}$$

Jejich vydělením pak dostaneme jednoduchou úměru mezi odpory

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_A}{R_B} .$$

Jelikož má odporový drát stejný plošný průřez  $S$  po celé délce, lze vyjádřit odpory  $R_A$  a  $R_B$  obou částí drátu vztahy

$$\begin{aligned} R_A &= r \frac{\mathbf{I}_1}{S} && \text{a} \\ R_B &= r \frac{\mathbf{I}_2}{S} && , \end{aligned}$$

kde  $r$  je rezistivita drátu. Odtud už po krátké úpravě dostaneme pro hledaný odpor  $R_x$  konečný vztah

$$\boxed{R_x = R \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}} . \quad (4)$$

Na principu můstkové metody jsou pak založeny přístroje speciálně konstruované pro měření elektrických odporů (ale i indukčností a kapacit) v technické praxi.

## Postup měření :

**1)** Změřte odpor  $R_x$  pěti neznámých rezistorů přímou metodou podle Ohmova zákona. Každý odpor měřte pouze jednou, ale sestavte obě zapojení jak podle obr. 1a), tak i podle 1b). Na měřicích přístrojích vždy postupujte od nejvyššího rozsahu k rozsahům nižším; hodnoty proudu i napětí odečítejte až na tom rozsahu, kde budete mít na displeji přístroje 3 platná čísla, aby přesnost vašeho měření byla co nejvyšší! Hodnoty zapisujte do následující Tabulky I a výsledky získané oběma metodami porovnejte navzájem.

Tabulka I

Odpor číslo	zapojení a)			zapojení b)		
	$U$ (V)	$I$ (mA)	$R_x$ ( $\Omega$ )	$U$ (V)	$I$ (mA)	$R_x$ ( $\Omega$ )
1						
2						
3						
4						
5						

- 2) Sadu rezistorů s neznámými odpory  $D_x$  změřte přímo ohmmetrem. Každý odpor stačí změřit pouze jednou. Na měřicím přístroji opět postupujte od nejvyššího rozsahu k rozsahům nižším a hodnotu odporu odečítejte až na tom rozsahu, kde budete mít na displeji přístroje 3 platná čísla.
- 3) Proměřte sadu rezistorů nepřímou metodou pomocí Wheatstoneova mostu. Zapojte obvod podle schématu na obr. 2. Obecně platí, že můstkové měření je nejpřesnější, když jsou hodnoty odporů  $R_x$  a  $R$  srovnatelné (pak totiž budou i délky  $\mathbf{l}_1$  a  $\mathbf{l}_2$  odporového drátu přibližně stejné, jejich poměr bude blízký jedničce a každá nepřesnost se zdaleka tak neprojeví, jako kdyby byl mezi těmito hodnotami např. řádový rozdíl). Jelikož již známe hodnoty odporů  $R_x$  z předchozích měření, můžeme na dekádě nastavit odpor  $R$  ve srovnatelné výši s odporem  $R_x$  a to tak, aby byl přibližně v rozmezí

$$R = R_x \pm 30\% R_x \quad .$$

Každý z pěti neznámých rezistorů přitom proměřte desetkrát, pokaždé však volte na dekádě jinou hodnotu odporu  $R$  z výše vymezeného intervalu. Jezdcem  $\mathbf{J}$  vyrovnejte pokaždé důkladně můstek do rovnováhy a odečtěte hodnoty délek  $\mathbf{l}_1$  a  $\mathbf{l}_2$  odporového drátu. Naměřené údaje zapisujte do Tabulky II.

Tabulka II

$n$	$R$ ( $\Omega$ )	$\mathbf{l}_1$ (cm)	$\mathbf{l}_2$ (cm)	$R_x$ ( $\Omega$ )	$\Delta R_x$ ( $\Omega$ )
1					
2					
.					
.					
10					

$$\overline{R_x} = \dots \Omega$$

Ze vztahu (4) vypočítejte a do tabulky doplňte hodnoty odporu  $R_x$  z každého měření. Určete střední (průměrnou) hodnotu neznámého odporu  $\overline{R_x}$ , jeho pravděpodobnou chybu  $\overline{J}_{R_x}$  a relativní chybu měření v procentech. Výsledek pak запиšte ve tvaru

$$R_x = \overline{R_x} \pm \overline{J}_{R_x} \quad .$$

- 4) Změřte odpory  $R_x$  neznámých rezistorů komerčním můstkem *RLCG*, případně pomocí dalších přístrojů, jež jsou v posluchačské laboratoři k dispozici. Výsledky všech měření získané různými metodami porovnejte navzájem.
- 5) Pomocí ohmmetru nebo komerčního můstku *RLCG* proveďte měření některých vybraných sériových i paralelních kombinací rezistorů  $R_x$  a ověřte vztahy, jež platí pro velikost výsledného odporu, tj.

$$R_s = R_1 + R_2 \quad \text{pro sériové zapojení a}$$

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{pro zapojení paralelní.}$$

# V ý k o n s t e j n o s m ě r n ě h o p r o u d u

**Ú k o l :** Sledovat závislost výkonu stejnosměrného proudu na velikosti vnějšího odporu

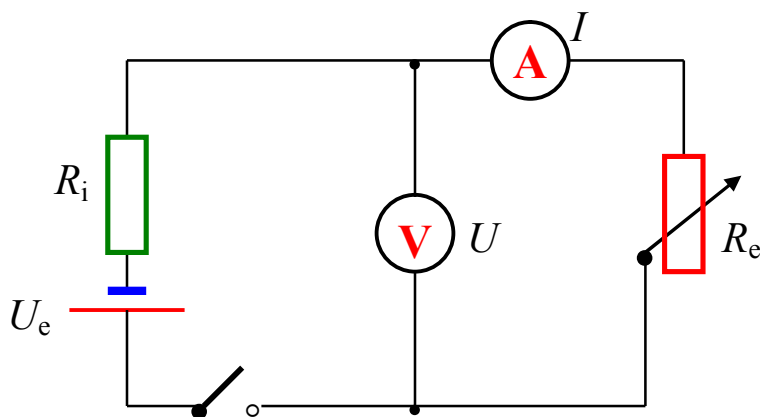
**P o t ř e b y :** Viz seznam v deskách u úlohy na pracovním stole.

## Obecná část:

Výkon, jenž zdroj stejnosměrného proudu dodává do obvodu, závisí na velikosti odporu  $R_e$  vnější části obvodu. Představme si jednoduchou modelovou situaci – obvod, jenž se skládá pouze ze zdroje s elektromotorickým napětím  $U_e$  a vnitřním odporem  $R_i$ , k němuž je připojen jediný rezistor s odporem  $R_e$  (viz obr.1). Zdroj dodává do vnějšího obvodu (tedy do rezistoru s odporem  $R_e$ ) proud  $I$ . Jeho velikost, jež závisí právě na odporu  $R_e$ , měříme ampérmetrem; k odporu paralelně připojený voltmetr pak měří napětí  $U$ , jež je současně svorkovým napětím zdroje. Pro jeho velikost platí

$$U = U_e - R_i \cdot I \quad . \quad (1)$$

Svorkové napětí  $U$  zdroje tedy klesá s rostoucím proudem v obvodu - zdroj je vyšším odběrem proudu více zatěžován.



Obr. 1

Celkový výkon  $P_z$ , jenž dodává zdroj do celého obvodu, je dán výrazem

$$P_z = \frac{U_e^2}{R_i + R_e} \quad . \quad (2)$$

Jak je patrné, s rostoucím odporem  $R_e$  vnější části obvodu, postupně nepřímě úměrně klesá (což odpovídá i té skutečnosti, že při vyšším odporu  $R_e$  je zdroj méně zatěžován odběrem proudu). Nejvyšší výkon pak dodává zdroj do obvodu tehdy, je-li vnější část obvodu ve zkratu ( $R_e = 0 \Omega$ ); pak nutně platí

$$P_{z\max} = \frac{U_e^2}{R_i} \quad . \quad (3)$$

Zaměřme se nadále pouze na tu část celkového výkonu zdroje, jež se spotřebuje ve vnější části obvodu, t.j. na odporu  $R_e$ . Tento výkon  $P$  lze snadno spočítat, platí totiž

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 \quad (4)$$

Jelikož proud  $I$  protékající obvodem na obr. 1 je dán vztahem vyplývajícím z Ohmova zákona

$$I = \frac{U_e}{R_i + R_e} \quad (5)$$

dostaneme po dosazení a krátké úpravě funkční závislost výkonu  $P$  na velikosti vnějšího odporu  $R_e$  ve tvaru

$$P(R_e) = R_e \frac{U_e^2}{(R_i + R_e)^2} \quad (6)$$

Protože se jedná o spojitou, hladce diferencovatelnou funkci, získáme její případný extrém ze známé podmínky pro první derivaci

$$\frac{dP}{dR_e} = 0$$

Po krátkém výpočtu (ten si proveďte sami!), dostáváme

$$\frac{dP}{dR_e} = U_e^2 \frac{R_i - R_e}{(R_i + R_e)^3} \quad (7)$$

Jak je patrné z posledního vztahu, nastává extrém výkonu při rovnosti vnitřního odporu zdroje a vnějšího odporu obvodu

$$R_i = R_e \quad (8)$$

Že se jedná o maximum výkonu na vnějším odporu  $R_e$  lze snadno ověřit ze změny znaménka první derivace. Ze vztahu (7) je patrné, že

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_e} > 0 & \quad \text{pro} \quad R_e < R_i \quad \text{a} \\ \frac{dP}{dR_e} < 0 & \quad \text{pro} \quad R_e > R_i \end{aligned}$$

Po dosazení podmínky rovnosti  $R_i = R_e$  (7) do vztahu (6), pak dostáváme, že maximální výkon elektrického proudu na vnějším odporu  $R_e$  obvodu lze vyjádřit výrazem

$$P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i} \quad (9)$$

Tento vztah lze experimentálně ověřit, což bude i jedním z úkolů vaší práce.



**Poznámka:** Je však nutné si uvědomit, že jsme v předcházejícím výpočtu vyšetřovali **ideální elektrický obvod**. Odpor  $R_A$  ampérmetru a odpor spojovacích vodičů jsme považovali za nulový a odpor  $R_V$  voltmetru naopak za nekonečně velký. V reálném případě (tj. i při vašem měření této úlohy) se však odpory všech těchto prvků v obvodu projeví a dojde tak k mírným odchylkám vámi naměřených a následně i vypočítaných hodnot od výsledků, jež dávají vztahy (1) – (9).

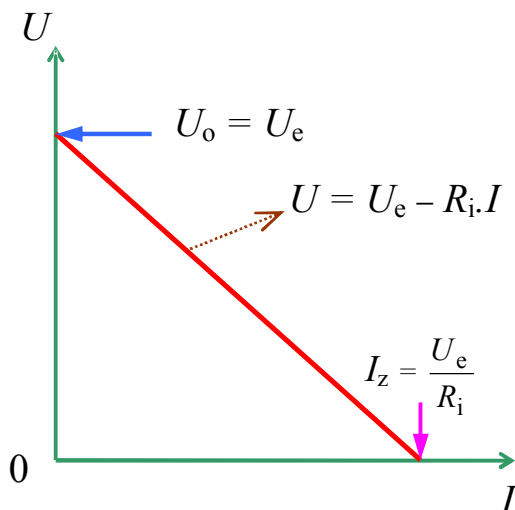
### Postup měření:

Pro sledování závislosti výkonu  $P$  stejnosměrného proudu spotřebovaného na vnějším odporu  $R_e$  na velikosti tohoto odporu zapojíme obvod podle již výše uvedeného obr. 1. Protože používáme stabilizovaný zdroj napětí, jehož skutečný vnitřní odpor je zanedbatelný, je nutné vnitřní odpor  $R_i$  zdroje modelovat sériově připojenou dekádou. Aby měl proud odebíraný ze zdroje do obvodu přiměřenou velikost, volíme hodnoty modelového vnitřního odporu v desítkách ohmů (70 – 90  $\Omega$ ). Vnější odpor  $R_e$  pak postupně měníme v okolí předem zvolené hodnoty vnitřního  $R_i$ . Výkon  $P$  ustáleného elektrického proudu na spotřebovaný na vnějším odporu pak vypočítáme z naměřených hodnot proudu  $I$  a napětí  $U$  podle vztahu (4)

$$\boxed{P = U \cdot I} \quad . \quad (4)$$

K ověření platnosti vztahu (9) pro maximální výkon  $P_{\max}$  spotřebovaný na vnějším odporu je nutné určit hodnotu elektromotorického napětí  $U_e$  vámi používaného zdroje. To je možné provést dvěma následujícími způsoby.

- a) Toto napětí přímo změříte voltmetrem při rozpojení vnějšího obvodu ( $R_e \rightarrow \infty$ ). Zdroj nebude prakticky zatěžován odběrem proudu (záleží na kvalitě použitého voltmetru a jeho vnitřním odporu  $R_V$ ) a podle vztahu (1) bude v takovém případě svorkové napětí, jež voltmetrem měříte, přímo rovno napětí elektromotorickému.
- b) Hodnotu elektromotorického napětí  $U_e$  zdroje lze získat též vyhodnocením grafické závislosti svorkového napětí na odebíraném proudu  $U = f(I)$  – viz obr. 2.



Obr. 2 – zatěžovací charakteristika zdroje

V souladu se vztahem (1)  $U = U_e - R_i \cdot I$  je tato lineární závislost vyjádřena klesající přímkou, přičemž její průsečík s proudovou osou představuje zkratový proud  $I_z$  a průsečík s osou napětíovou tzv. napětí naprázdno  $U_o$ , jež je rovno právě napětí elektromotorického  $U_e$ . Jelikož většinou neměříme proudy blízké 0 A (což platí i pro vaše měření), je třeba průsečík s napětíovou osou získat **extrapolací** zátěžové přímky „doleva“ na hodnotu  $I = 0$ .

## Úkoly:

1) Vyšetřete závislost výkonu  $P$  stejnosměrného proudu na vnějším odporu  $R_e$  na velikosti tohoto odporu pro tři různé modelově zvolené hodnoty vnitřního odporu  $R_i$  zdroje:

a)  $R_i = 70 \Omega$  ;      b)  $R_i = 70 \Omega$  ;      c)  $R_i = 70 \Omega$  .

Vnější odpor  $R_e$  obvodu při všech třech měřeních měňte v intervalu od  $30 \Omega$  do  $150 \Omega$  po deseti ohmech a naměřené a následně vypočítané hodnoty zapisujte do následující tabulky:

$R_e$ ( $\Omega$ )	$R_i = 70 \Omega$			$R_i = 80 \Omega$			$R_i = 90 \Omega$		
	$U$ (V)	$I$ (mA)	$P$ (mW)	$U$ (V)	$I$ (mA)	$P$ (mW)	$U$ (V)	$I$ (mA)	$P$ (mW)
30									
40									
50									
...									
...									
150									

$$U_e = \dots\dots\dots V$$

2) Do jednoho grafu vynesete všechny tři závislosti svorkového napětí  $U$  zdroje na odebíraném proudu  $I$  do obvodu (viz obr. 2) a **extrapolací** odečtete hodnotu elektromotorického napětí  $U_e$  zdroje. Ověřte, zda tato hodnota odpovídá údajům naměřenému voltmetrem při rozpojené vnější části obvodu.

3) Graficky zpracujte závislost výkonu  $P$  stejnosměrného proudu na vnějším odporu  $R_e$  na velikosti tohoto odporu (opět zpracujte všechny tři závislosti do jednoho grafu). Zvolte si vhodné měřítko, aby maxima jednotlivých křivek byla dostatečně výrazná!

4) Ověřte, zda platí, že maximum výkonu  $P_{\max}$  na vnějším odporu nastává skutečně při rovnosti vnitřního odporu  $R_i$  zdroje a vnějšího odporu  $R_e$  obvodu.

5) Porovnejte vámi vypočítanou maximální hodnotu výkonu  $P$  z naměřených hodnot svorkového napětí  $U$  a proudu  $I$  ( $P = U \cdot I$ ) s teoretickou hodnotou udávanou výrazem

$$P_{\max} = \frac{U_e^2}{4 \cdot R_i} \quad (9)$$

a vysvětlíte v závěru vašeho protokolu z této práce případný rozdíl!