# Ohniskov§ vzdálenost
# spojných čoček

**Úkol:** Změřit ohniskové vzdálenosti spojných čoček různými metodami.
**Potřeby:** Viz seznam v deskách u úlohy na pracovním stole.

## Obecná část:

**Geometrická optika** je tím oborem optiky, v němž se při popisu procesu šíření optického záření a při procesu optického zobrazování zanedbává vlnová povaha světla i jeho kvantové vlastnosti. Matematický popis procesů, na něž se omezuje geometrická optika, i příslušné geometrické konstrukce používají jako základní pojem **geometrický paprsek**. Ten je sice po geometrické stránce naprosto totožný s pojmem světelný paprsek, ale nepřipisuje se mu žádný zvláštní obsah po stránce fyzikální.

Geometrická optika se opírá o čtyři základní principy (resp. zákony):

→ **1.** princip přímočarého šíření světla,
→ **2.** zákon odrazu,
→ **3.** zákon lomu,
→ **4.** princip nezávislosti chodu světelných paprsků.

U čoček se při zobrazování uplatňuje jen lom světelných paprsků. Podle charakteru zobrazení rozlišujeme **čočky spojné** (neboli spojky), jež mění rovnoběžný svazek paprsků ve sbíhavý, a **čočky rozptylné** (neboli rozptylky), jež naopak mění rovnoběžný svazek paprsků na rozbíhavý.

### Zobrazování tenkou spojnou čočkou

Základní přímkou je u každé čočky (podobně jako i u jiných zobrazovacích zařízení) tzv. **optická osa** tenké čočky, jež prochází čočkou kolmo a navíc jejím **optickým středem** **O.** Body **F** a **F′** jsou **předmětové** a **obrazové ohnisko**, jejich vzdálenosti od optického středu čočky nazýváme **předmětová ohnisková vzdálenost** $f = |\mathbf{FO}|$ a **obrazová ohnisková vzdálenost** $f' = |\mathbf{OF'}|$. Pro ideální tenkou čočku platí, že jsou tyto dvě vzdálenosti stejné ( $f' = f$ ), a proto pro ně používáme společné označení **ohnisková vzdálenost** $f$.

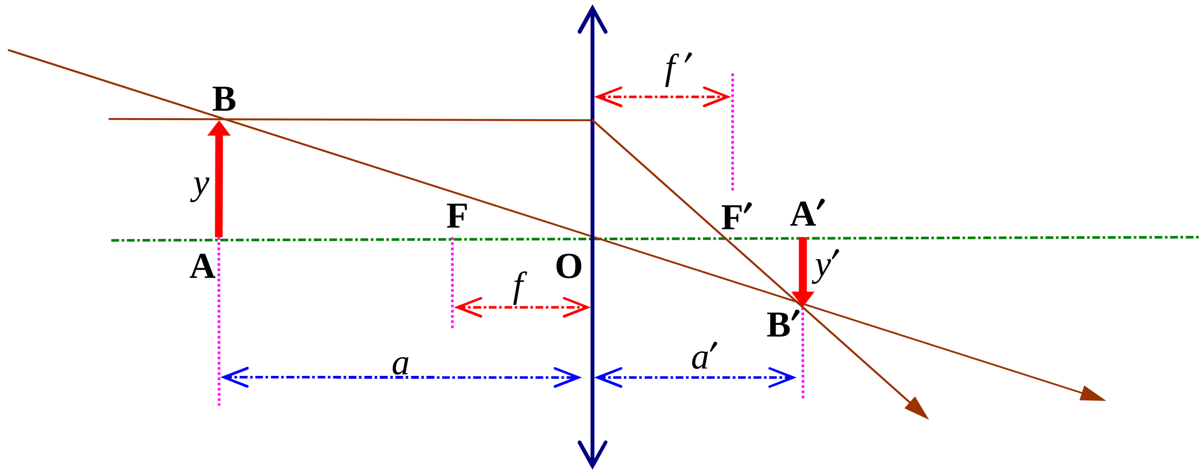
Na rozdíl od zrcadel světlo čočkami prochází, a proto rozlišujeme prostor, z něhož světlo do čočky vstupuje – tzv. **předmětový prostor**, a prostor, do něhož světlo po průchodu čočkou vystupuje – tzv. **obrazový prostor**.

Při konstrukci obrazu vytvořeného tenkou čočkou (viz následující obr. 1) pak využíváme tří druhů význačných paprsků:

→ paprsek procházející optickým středem **O** čočky se jako jediný neláme a nemění svůj směr,

→ paprsek rovnoběžný s optickou osou po průchodu čočkou protíná optickou osu v obrazovém ohnisku **F′**,

→ paprsek procházející předmětovým ohniskem **F** se po průchodu čočkou stává rovnoběžným s optickou osou.




$a$ ........ předmětová vzdálenost

$a'$ ....... obrazová vzdálenost

$y$ ........ výška předmětu

$y'$ ....... výška obrazu

Obr. 1 - zobrazování tenkou spojnou čočkou

Vztah mezi předmětovou vzdáleností $a$, obrazovou vzdáleností $a'$ a ohniskovou vzdáleností $f$ pak vyjadřuje **zobrazovací rovnice tenké čočky**

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f}} \quad . \tag{1}$$

Příčné zvětšení $Z$ obrazu lze pak vyjádřit několika navzájem ekvivalentními vztahy. Platí, že

$$\boxed{Z=\frac{y'}{y}=-\frac{a'}{a}=-\frac{a'-f}{f}=-\frac{f}{a-f}} \quad . \tag{2}$$

Je však třeba zdůraznit, že zde platí určitá **znaménková konvence** (pravidla). Výškám předmětu a obrazu $y$, $y'$ přiřazujeme **nad** optickou osou **kladnou** hodnotu, **pod** ní pak hodnotu **zápornou**.

**To znamená:** Bude-li vznikat obraz **vzpřímený**, bude znaménko příčného zvětšení **kladné** ($Z > 0$); vzniká-li ovšem obraz **převrácený**, což je právě případ vašich meření, bude jeho znaménko **záporné** ($Z < 0$). **!!**

Ze zobrazovací rovnice pak lze po změření předmětové a obrazové vzdálenosti snadno vypočítat ohniskovou vzdálenost tenké čočky

$$\boxed{f=\frac{aa'}{a+a'}} \quad . \tag{3}$$

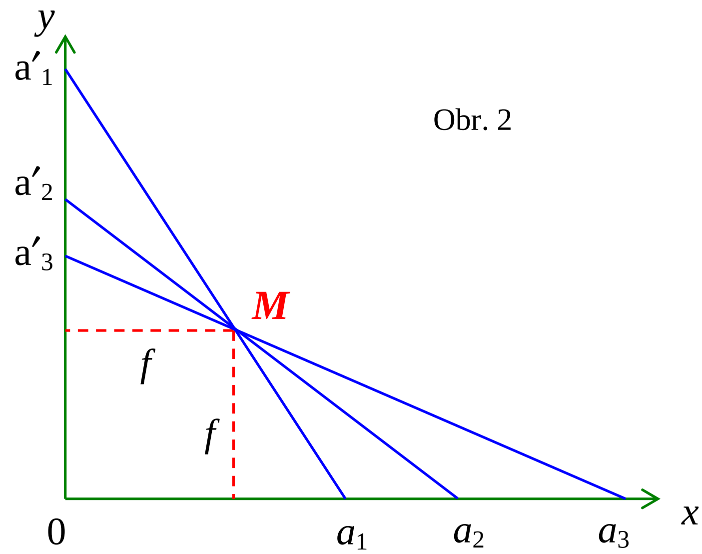
Kromě přímé aplikace zobrazovací rovnice se však používají pro zjišťování ohniskových vzdáleností čoček i jiné (nepřímé) metody, jež jsou buď jednodušší, než je měření předmětové vzdálenosti $a$ a obrazové vzdálenosti $a'$, nebo jsou zatíženy menší chybou než výpočet podle vzorce (3). Je třeba si uvědomit, že reálné čočky nebývají nekonečně tenké, mají určitou tloušťku a že zobrazovací rovnice (1) přesně platí skutečně jen pro takové čočky, jejichž tloušťka je zanedbatelně malá.

## Postup měření:

### I. Určení ohniskové vzdálenosti spojné čočky přímou metodou ze zobrazovací rovnice

Změříme-li předmětovou vzdálenost $a$ zobrazovaného předmětu a obrazovou vzdálenost $a'$ ostrého obrazu, je možno toto měření okamžitě vyhodnotit podle vztahu (3). Toto měření lze však zpracovat též **graficky**, a to následujícím způsobem.

Spočívá v tom, že na vodorovnou osu $x$ pravoúhlé soustavy souřadnic nanášíme předmětovou vzdálenost $a$, na svislou osu $y$ pak obrazovou vzdálenost $a'$. Takto vynesené body pak spojíme úsečkou (viz obr. 2). Provedeme-li více měření předmětové a obrazové vzdálenosti u jedné a téže čočky a zpracujeme-li je naprosto stejným způsobem, zjistíme, že se všechny takto zkonstruované úsečky protínají v jednom bodě **M**. Přitom bude platit, že obě souřadnice tohoto bodu **M** jsou rovny hledané ohniskové vzdálenosti měřené čočky (tedy platí **M** [ $f$ ; $f$ ]).




Obr. 2

Zdůvodnění tohoto postupu je přitom velmi snadné. Přímky, jejichž částmi jsou úsečky vynesené na obr. 2, lze posat rovnicemi, jež mají zápis v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a'} = 1 \quad . \qquad (4)$$

Všechny takové přímky ale musí nutně obsahovat bod **M**, jehož souřadnice jsou $x = f$, $y = f$, neboť právě dosazením těchto hodnot do rovnice (4) dostáváme vztah, jenž je jen upraveným zápisem zobrazovací rovnice tenké čočky

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{a'} = 1 \quad .$$

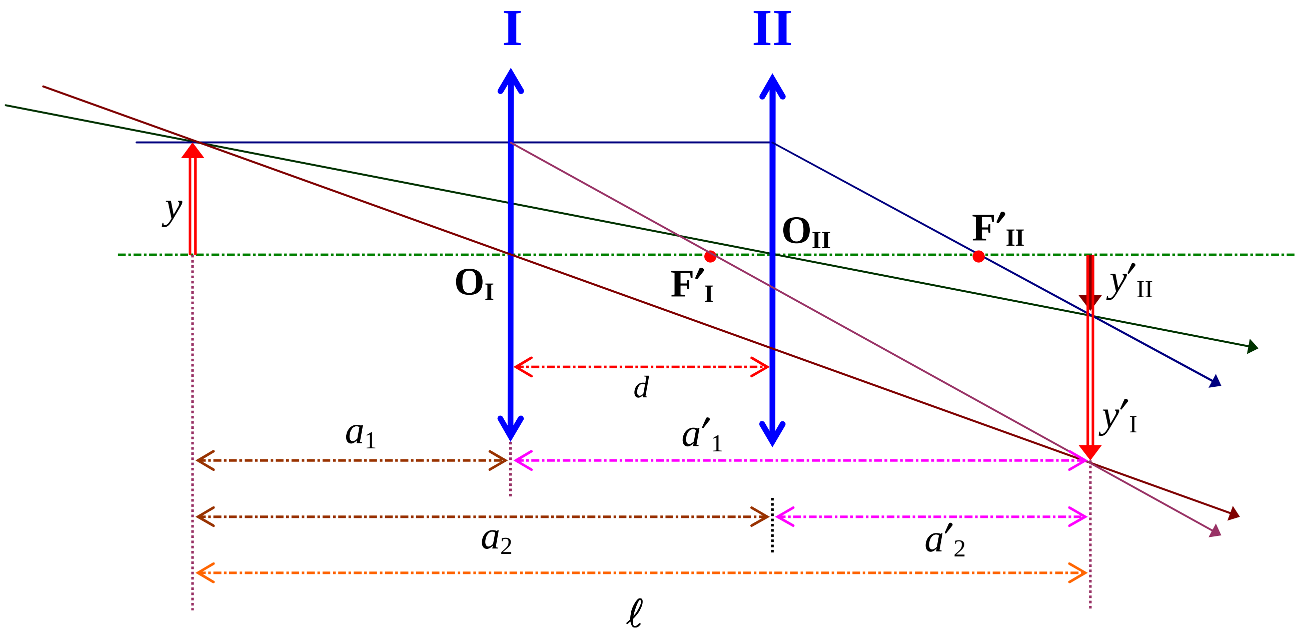
### II. Besselova metoda

Tato metoda je založena na poznatku, že pro jistou pevnou vzdálenost $\ell$ předmětu a stínítka, na němž se vytváří obraz, existují dvě polohy čočky **I** a **II** (viz následující obr. 3), při nichž vzniká ostrý skutečný obraz. Lze snadno dokázat, že takový případ může nastat jen v tom případě, kdy vzdálenost předmětu od stínítka $\ell = a + a'$ splňuje triviální podmínku

$$\ell > 4f \quad .$$

Je-li právě $\ell = 4f$, vzniká jen jeden stejně velký skutečný převrácený obraz, při menších vzdálenostech $\ell$, než je čtyřnásobek ohniskové vzdálenosti dané čočky skutečný obraz na stínítku vůbec nevzniká.

V poloze I je čočka blíže předmětu a obraz je zvětšený, v poloze II je čočka blíže obrazu, a ten je naopak zmenšený. Je patrné, že obě polohy čočky budou položeny symetricky vzhledem ke středu vzdálenosti mezi předmětem a stínítkem $\ell$ a předmětová vzdálenost v prvním případě bude rovna obrazové vzdálenosti v druhém případě a naopak. To vyplývá z tzv. **záměnnosti chodu paprsků**, podle níž lze na optické ose spojné čočky navzájem vyměnit polohy předmětu a obrazu a s tím i symetricky polohu čočky samé.



Obr. 3

Označíme-li vzdálenost obou poloh čočky (I a II) jako $d$, potom vidíme, že platí

$$\ell = a_1 + a_1' \quad , \qquad d = a_1' - a_1 \quad .$$

Jednoduchou úpravou dostáváme

$$a_1 = \frac{\ell + d}{2} \quad , \qquad a_1' = \frac{\ell - d}{2} \quad .$$

Po dosazení hodnot $a_1$ a $a_1'$ do vztahu (3) dostaneme pro hledanou ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{aa'}{a + a'} = \frac{(\ell + d).(\ell - d)}{4\ell} \qquad \text{a odtud}$$

$$\boxed{f = \frac{\ell^2 - d^2}{4\ell}} \quad . \qquad (5)$$

Vidíme, že k určení ohniskové vzdálenosti nám u této metody stačí při pevné vzdálenosti $\ell$ mezi předmětem a obrazem změřit pouze jeden délkový údaj – vzdálenost *d* dvou poloh čočky.

## III. Stanovení ohniskové vzdálenosti spojné čočky z příčného zvětšení

Příčné zvětšení čočky je definováno jako poměr velikosti obrazu $y'$ ku velikosti předmětu *y*, jenž je danou čočkou zobrazován, a jeho matematické vyjádření udává série vztahů (2).

Jednoduchou úpravou jednoho z nich

$$Z = -\frac{a' - f}{f}$$

získáme vzorec vyjadřující ohniskovou vzdálenost čočky pomocí příčného zvětšení

$$\boxed{f = \frac{a'}{1 - Z}} \qquad a' \text{ - obrazová vzdálenost} \qquad (6)$$

## IV. Abbeova metoda

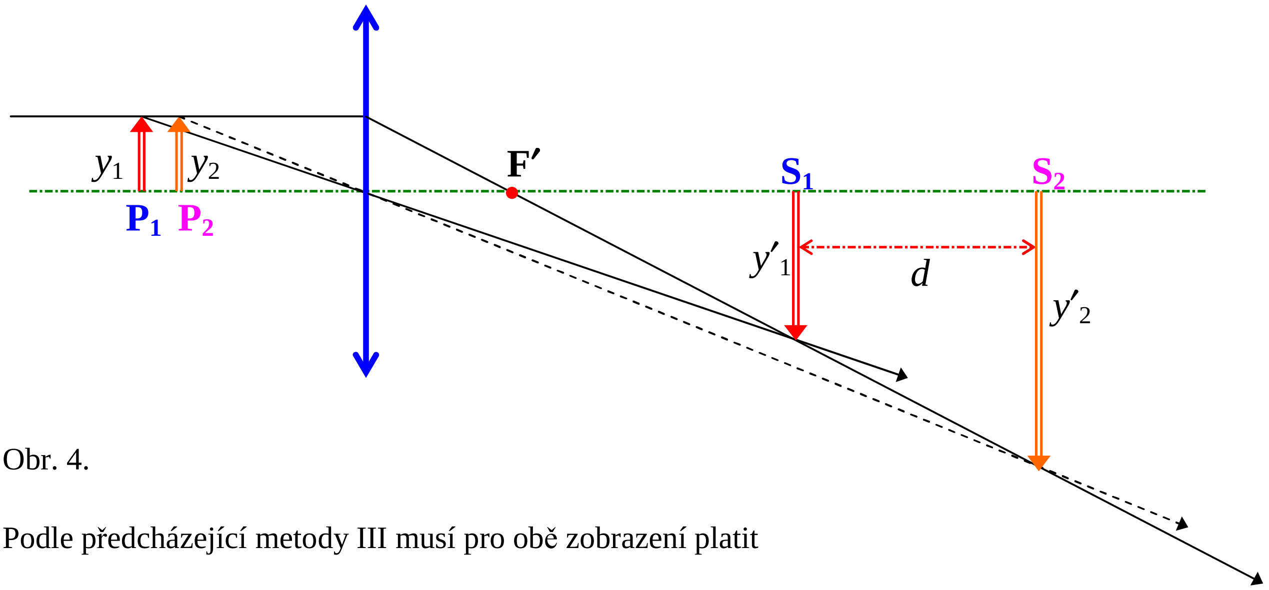
Tato metoda je také založena na měření příčného zvětšení. Na rozdíl od předcházející metody č. III však nevyžaduje měření obrazové vzdálenosti $a'$, jež je u silnějších čoček vždy zatíženo určitou chybou.

Pro danou polohu předmětu $P_1$ a stínítka $S_1$ existuje při splnění podmínky $\ell > 4f$ jistá poloha čočky, při níž vznikne na stínítku ostrý zvětšený a převrácený obraz předmětu (viz obr. 4). Měřením velikosti předmětu $y_1$ a jeho obrazu $y'_1$, můžeme určit příčné zvětšení

$$Z_1 = \frac{y'_1}{y_1} \quad .$$

Nyní oddálíme stínítko od čočky o jistou **přesně změřenou vzdálenost** *d* do polohy $S_2$. Čočku ale přitom necháme v nezměněné poloze a najdeme takovou polohu předmětu $P_2$, při níž opět vzniká ostrý zvětšený obraz výšky $y'_2$. Pro toto druhé zvětšení platí

$$Z_2 = \frac{y'_2}{y_2} \quad .$$




Obr. 4.

Podle předcházející metody III musí pro obě zobrazení platit

$$f=\frac{a_1'}{1-Z_1} \qquad a \qquad f=\frac{a_2'}{1-Z_2} \quad .$$

Odtud dostáváme

$$d = a'_2 - a'_1 = f(1-Z_2) - f(1-Z_1) = f(Z_1-Z_2) \quad ,$$

z čehož vyplývá poslední vztah pro ohniskovou vzdálenosti

$$\boxed{f=\frac{d}{Z_1-Z_2}} \quad . \tag{7}$$

## Ú k o l y :

### 1) Grafické zpracování přímé metody

Pro konstrukci úseček použijeme čtyř dvojic naměřených předmětových a obrazových vzdáleností. Umístěte stínítko do polohy, kdy vznikne po zobrazení čočkou jak zvětšený, tak i zmenšený obraz předmětu (tím je v tomto, ale i v dalších úkolech čtvercová síťka na níž je znázorněna definovaná vzdálenost). Změřte nejprve předmětovou a obrazovou vzdálenost $a_1$ a $a'_1$ pro zvětšený obraz, a poté tyto hodnoty označené jako $a_2$ a $a'_2$ pro zmenšený obraz. Pro vyšší přesnost toto měření opakujte pětkrát; předmětové a obrazové vzdálenosti měřte s přesností na jednotky milimetrů!

Potom stínítko posuňte o něco dál od zobrazovaného předmětu a předcházející měření zopakujte. Nalezněte zvětšený a zmenšený obraz a měřte příslušné předmětové a obrazové vzdálenosti $a_3$ a $a'_3$ resp. $a_4$ a $a'_4$.

Naměřené hodnoty zapisujte do tabulky I a zpracujte graficky (viz obr. 2). Na vodorovnou osu nanášejte průměrné hodnoty $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_4}$ předmětových vzdáleností a na svislou osu pak průměrné hodnoty $\overline{a_1'}, \ldots, \overline{a_4'}$ vzdáleností obrazových.

**Pozor !!!** Má-li být měření správně vyhodnoceno, musejí se osy grafu protínat jednoznačně **v počátku !!!**

Tabulka I:

| $n$ | $a_1$ (mm) | $a'_1$ (mm) | $a_2$ (mm) | $a'_2$ (mm) | $a_3$ (mm) | $a'_3$ (mm) | $a_4$ (mm) | $a'_4$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 … | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| ∅ | | | | | | | | |

### 2) Besselova metoda

Zvolte pevně vzdálenost $\ell$ (předmět – stínítko) tak, aby vznikl zvětšený i zmenšený ostrý obraz předmětu (čtvercové sítě). Pak desetkrát změříme vzdálenost $d$ obou poloh čočky $d = |\mathbf{O_I O_{II}}|$ s přesností na jednotky milimetrů. Uvědomte si, že měření této vzdálenosti $d$ je zejména u silnějších čoček mnohem přesnější než měření předmětové a obrazové vzdálenosti $a$ a $a'$!!!

Hodnoty získané měřením zapisujte do tabulky II, podle vztahu (5) vypočítejte hledanou ohniskovou vzdálenost $f$ čočky, její průměrnou hodnotu $\overline{f}$, pravděpodobnou chybu průměru $\vartheta_{\overline{f}}$ a relativní chybu měření.

Tabulka II:

$\ell$ = . . . . . mm

| $n$ | $d$ (mm) | $f$ (mm) | $\Delta f$ (mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| . . . | | | |
| 10 | | | |

$\overline{f}$ = . . . . mm

## 3) Určování ohniskové vzdálenosti ze zvětšení

Stínítko dejte do polohy, kdy se vytvoří ostrý **zvětšený** obraz předmětu. Na čvercové síťce, kterou zobrazujete, máte přesně vyznačenou vzdálenost 2 cm, takže zvětšení předmětu určíte snadno změřením velikosti obrazu právě těchto 2 cm na stínítku. Měření provádějte pro vyšší přesnost desetkrát. Do tabulky III pak zaznamenávejte obrazovou vzdálenost $a'$ a zvětšení $Z$.

**Dejte pozor na to, že vzniká obraz převrácený a zvětšení je proto záporné !!!**

Hledanou ohniskovou vzdálenost $f$ vypočítejte ze vztahu (6). Dále postupujte jako v předcházejícím úkole - určete průměrnou hodnotu $\overline{f}$, její pravděpodobnou chybu $\overline{\vartheta}_f$ a relativní chybu měření!

Tabulka III:

| $n$ | $a'$ (mm) | $Z$ | $f$ (mm) | $\Delta f$ (mm) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| . . . | | | | |
| 10 | | | | |

$\overline{f}$ = . . . . mm

## 4) Abbeova metoda

Postupujeme podle návodu uvedeného v obecné části. Čočkou opět zobrazujte čtvercovou síťku s vyznačenou vzdáleností 2 cm. Pro zvýšení přesnosti proveďte deset měření při první poloze $S_1$ stínítka a deset při druhé poloze $S_2$. Ohniskovou vzdálenost čočky počítejte podle vztahu (7), hodnoty zapisujte do tabulky IV a opět určete průměrnou hodnotu $\overline{f}$, její pravděpodobnou chybu $\overline{\vartheta}_f$ a relativní chybu měření!

Tabulka IV:

$d$ = . . . . . mm

| $n$ | $Z_1$ | $Z_2$ | $f$ (mm) | $\Delta f$ (mm) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| . . . | | | | |
| 10 | | | | |

$\overline{f}$ = . . . . mm

Výsledky získané v úkolech 2) - 4) zapisujte vždy ve tvaru

$$f = \overline{f} \pm \overline{\vartheta}_f \quad .$$

## 5) Hodnoty ohniskové vzdálenosti *f* dané čočky vypočítané různými metodami porovnejte!