Skládání sil

Úkol: Vyšetřovat rovnováhu tří sil, působících na tuhé těleso v jednom bodě.
Potřeby: Viz seznam v deskách u úlohy na pracovním stole.

Obecná část:

Při skládání soustavy několika sil působících na tuhé těleso se snažíme účinek těchto sil nahradit působením síly jediné. Musí být však při tom zachován jak posuvný, tak i otáčivý účinek původní soustavy sil, to znamená, že výslednice $\boldsymbol{F}$ takové soustavy bude dána vektorovým součtem skládaných sil

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \tag{1}$$

a navíc i její moment počítaný vzhledem k libovolnému nehybnému bodu **O** bude dán vektorovým součtem momentů skládaných sil počítaných k témuž bodu **O**

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k \quad . \tag{2}$$

Pozn.: Při skládání sil působících na tuhé těleso stačí vyšetřovat pouze působení sil vnějších, neboť síly vnitřní mají vždy nulovou výslednici i nulový výsledný moment.

Rovnovážná poloha tělesa

Tuhé těleso se nachází v rovnovážné poloze, je-li v dané inerciální soustavě v klidu. Nutnou podmínkou pro to, aby tuhé těleso v rovnovážné poloze bylo, je rovnováha vnějších sil, jež na těleso působí ***a současně*** také rovnováha momentů těchto sil.

a) Rovnováha vnějších sil působících na tuhé těleso

® vnější síly $\boldsymbol{F}_k$ (k = 1, 2, ... n), jež působí na tuhé těleso, jsou v rovnováze právě tehdy, je-li jejich výslednice nulová. To znamená, že vektorový součet těchto sil musí být roven nule

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{0} \text{ N} \quad . \tag{3}$$

b) Rovnováha momentů vnějších sil působících na tuhé těleso vzhledem k danému bodu O

® momenty $\boldsymbol{M}_k$ vnějších sil působících na tuhé těleso počítané vzhledem k nehybnému bodu **O** jsou v rovnováze právě tehdy, je-li jejich výsledný moment vzhledem k témuž bodu nulový,

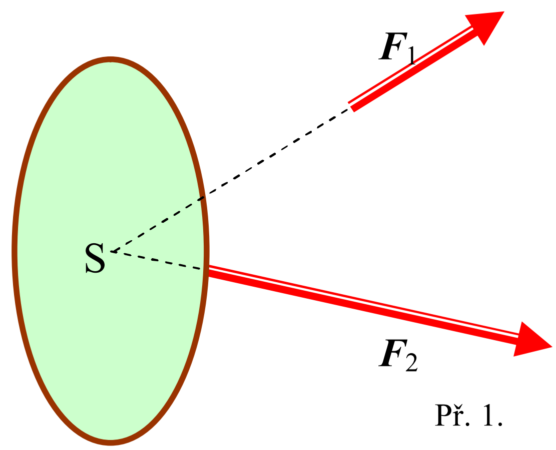
$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{0} \text{ Nm} \qquad \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{r}_k \,\mathbf{x}\, \boldsymbol{F}_k \quad , \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{r}_k$ je polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}_k$ vůči bodu **O**.

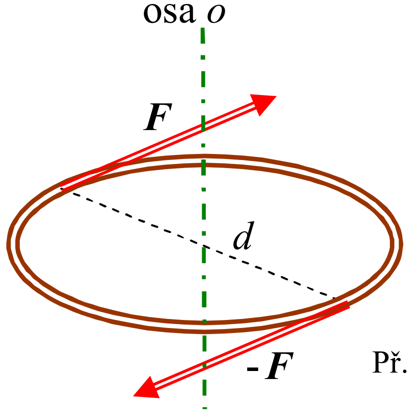
Jestliže všechny vnější síly působí **v jednom bodě** tuhého tělesa, je postačující podmínkou pro to, aby bylo těleso v rovnovážné poloze, podmínka rovnováhy těchto sil (3). V takovém případě je totiž podmínka pro rovnováhu momentů (4) splněna automaticky (všechny skládané síly mají totiž stejné působiště a jeho polohový vektor vzhledem k libovolnému bodu v prostoru je pro všechny síly i pro sílu výslednou identicky stejný).

Budou-li vnější síly působit **v různých bodech** tuhého tělesa, musí být splněny současně obě dvě výše uvedené podmínky (3) i (4), neboť platnost (či neplatnost) jedné z nich automaticky nezaručuje i platnost (či neplatnost) druhé – viz dva následující příklady. **!!**

Př. 1.: Dvě síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na tuhé těleso tak, že obě jejich vektorové přímky procházejí hmotným středem tělesa S. Výslednice sil $\boldsymbol{F}$ je nenulová, výsledný silový moment $\boldsymbol{M}$ počítaný vzhledem k hmotnému středu nulový je. Těleso koná pouze **posuvný pohyb.**



Př. 1.



Př. 2.

Př. 2.: Na těleso působí dvojice sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Jejich výslednice je evidentně nulová, ale výsledný silový moment je nenulový (jeho velikost $M = F.d$). Těleso koná pouze **rotační pohyb** .

Podmínky rovnováhy (3) a (4) jsou vyjádřeny ve vektorovém tvaru. V trojrozměrné kartézské soustavě souřadné je pak lze rozepsat do jednotlivých složek:

- podmínka silové rovnováhy:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \ \text{N} \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \ \text{N} \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \ \text{N} \tag{5}$$

- podmínka momentové rovnováhy:

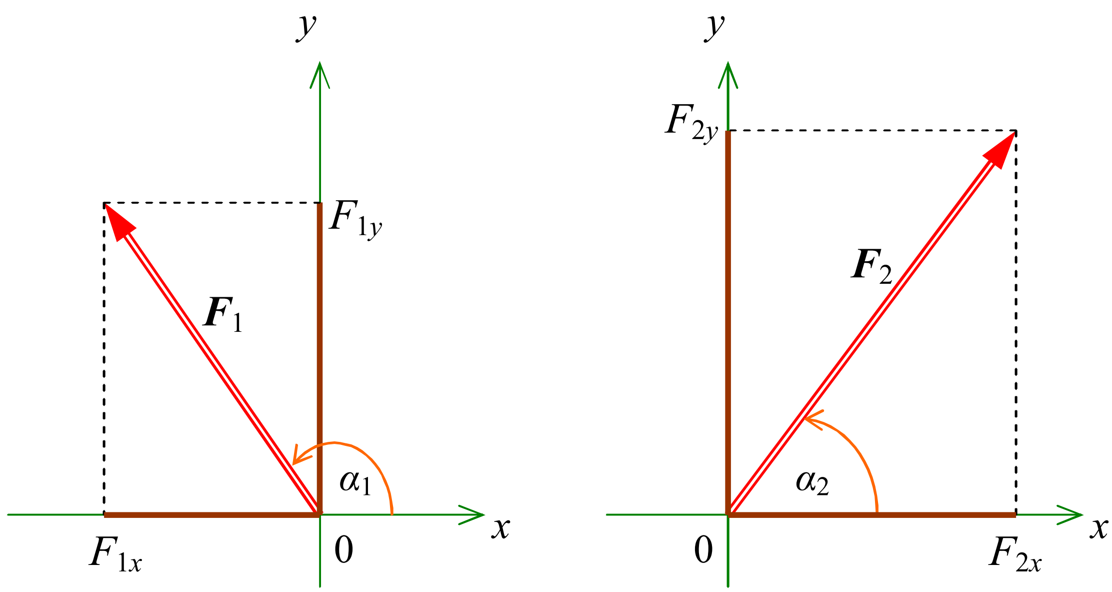
$$\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0 \ \text{Nm} \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0 \ \text{Nm} \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0 \ \text{Nm} \tag{6}$$

V naší úloze budeme pracovat pouze se třemi silami působícími v jedné rovině – v rovině pracovní desky. Lze snadno dokázat, že v případě **různoběžných** sil (ať už působí v jednom nebo různých bodech roviny), je postačující podmínkou rovnováhy podmínka silová (3), platnost momentové (4) je pak automaticky zaručena.

Působí-li síly v jedné rovině, lze při použití pravoúhlé souřadnicové soustavy každou sílu rozložit na dvě složky F_x a F_y ve směru os x a y. Jejich velikost lze snadno vyjádřit pomocí vztahů

$$F_{kx} = |\boldsymbol{F}_k| \cos a_k \quad , \quad F_{ky} = |\boldsymbol{F}_k| \sin a_k \tag{7}$$

kde $|\boldsymbol{F}_k|$ je velikost příslušné síly a a_k je směrový úhel, jenž svírá vektor síly $\boldsymbol{F}_k$ s kladnou částí osy x (viz následující obr. 1).



Obr. 1: Určení složek vektoru síly

Směrový úhel a přitom měříme zásadně v jednom směru, a to od kladné části osy x **proti směru chodu hodinových ručiček**. Jedině tak nám totiž vyjdou v prvním kvadrantu obě složky síly kladné, v druhém kvadrantu x-ová záporná a y-ová kladná, atd.

K výpočtu úhlu a lze využít nejlépe goniometrickou funkci tanges, jejíž hodnotu určíme vytýčením vhodného pravoúhlého trojúhelníka na pracovní ploše s milimetrovou sítí. Přitom je potřeba (pro přesnost měření) volit rozměry tohoto trojúhelníka co největší.

Podmínku silové rovnováhy v rovině pak vyjadřují pouze dvě rovnice pro x-ové a y-ové složky

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \ \mathrm{N} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \ \mathrm{N} \quad . \tag{8}$$

Jinými slovy, má-li být celý systém v rovnováze,
musí být v rovnováze složky všech působících sil.

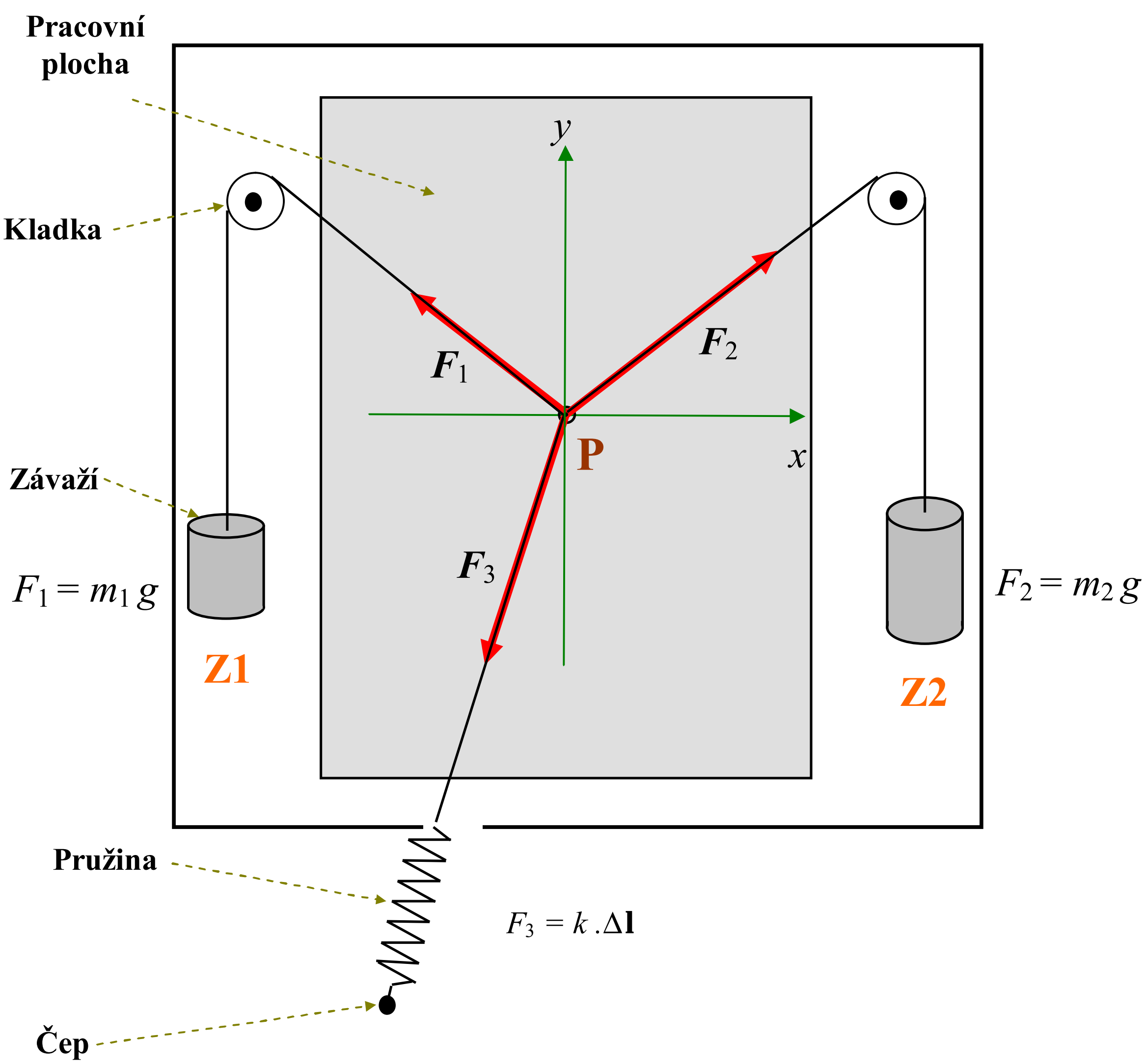
Naopak, při znalosti složek lze snadno vypočítat velikost odpovídající síly podle vztahu

$$|\boldsymbol{F}_n| = \sqrt{(F_{nx})^2 + (F_{ny})^2} \quad . \tag{9}$$

Postup práce:

Určování velikosti jedné neznámé síly

Skládání a rovnováhu sil vyšetřujeme na svislé pracovní ploše, jež je schématicky znázorněna na obr.2. Dvě známé síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou představovány tíhovými silami závaží **Z1** a **Z2**, neznámá síla $\boldsymbol{F}_3$, jež s nimi udržuje rovnováhu, je síla pružnosti daná působením napnuté pružiny.



Obr. 2: Schéma stojanu s pracovní plochou při vyšetřování rovnováhy sil se společným působištěm **P**.

Před vlastním zahájením práce vám vyučující stanoví, kterou kombinaci dvou závaží a jedné pružiny budete proměřovat.

Úkoly:

1. Stanovení hmotnosti závaží a tuhosti pružin.

a) Zvažte obě závaží s přesností na desetiny gramu a vypočtěte velikosti příslušných tíhových sil.

b) Změřte tuhost zvolené pružiny k následujícím způsobem:

- ® posuvným měřítkem změřte délku **ne**napnuté pružiny, kterou označte $\mathbf{l}_o$; pružinu pak volně zavěste na některý z čepů na stojanu;
- ® na pružinu postupně zavěšujte různá závaží (Z1 až. Z4), pokaždé změřte délku napnuté pružiny a označte ji $\mathbf{l}_1$ až $\mathbf{l}_4$.
- ® pro prodloužení $\Delta\mathbf{l}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{l}_o$ pružiny musí platit vztah

$$m_i\, g = k_i \,.\, \Delta\mathbf{l}_i \quad , \qquad (10)$$

kde k_i je příslušná tuhost pružiny a m_i hmotnost závaží.

- ® střední hodnota tuhosti $\bar{k}$ příslušné pružiny je pak dána aritmetickým průměrem všech čtyř měření na dané pružině

$$\bar{k} = \frac{1}{4}\left(k_1 + k_2 + k_3 + k_4\right) \quad . \qquad (11)$$

Pokud se ovšem některá ze čtyř hodnot tuhosti k_i výrazně odlišuje od ostatních, vyřaďte ji a výpočet střední hodnoty proveďte pouze ze zbývajících tří.

2. Určení velikosti neznámé síly F_3

- ® Podle pokynů vyučujícího sestavte soustavu **tří sil** působících **v jednom bodě** (viz obr. 2). Přitom dvě tíhové síly budete považovat za známé skládané síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, neznámou silou bude pro nás síla $\boldsymbol{F}_3$, jež je dána působením napnuté pružiny.
- ® Hodnoty zapisujte do následující tabulky, k určení směrových úhlů α_1 a α_2 přitom využijte milimetrovou síť na pracovní ploše (viz obr. 1 v obecné části).

Tabulka – určení velikosti neznámé síly: ($\Delta\mathbf{l}_3$ = ………. mm)

síla $\boldsymbol{F}_1$	m_1 = g	F_1 = N	α_1 = °	F_{1x} = N	F_{1y} = N
síla $\boldsymbol{F}_2$	m_2 = g	F_2 = N	α_2 = °	F_{2x} = N	F_{2y} = N
síla $\boldsymbol{F}_3$				F_{3x} = N	F_{3y} = N

- ® Velikosti složek F_{3x} a F_{3y} neznámé síly $\boldsymbol{F}_3$ vypočítáte na základě podmínky (8). Musí platit

$$F_{3x} = -(F_{1x} + F_{2x}) \;\; ; \;\; F_{3y} = -(F_{1y} + F_{2y}) \quad . \qquad (12)$$

Velikost F_3 neznámé síly pak určíte podle vztahu (9)

$$\boxed{F_3 = |\boldsymbol{F}_3| = \sqrt{(F_{3x})^2 + (F_{3y})^2}} \quad .$$

- ® Takto vypočítanou velikost F_3 neznámé síly na závěr porovnejte s hodnotou zjištěnou pomocí prodloužení $\Delta\mathbf{l}_3$ pružiny s využitím vztahu $F_3 = \bar{k}\, \Delta\mathbf{l}_3$.