

Torzní kmity a měření momentu setrvačnosti tuhého tělesa

- Úkol:**
1. Stanovte směrný moment resp. torzní konstantu šroubovitě zkrutné pružiny.
 2. Měřením periody torzních kmitů různých těles určete jejich moment setrvačnosti (prověřte, závisí-li doba kmitu na úhlu počáteční výchylky).
 3. Vypočítejte teoretické hodnoty momentu setrvačnosti měřených těles.
 4. *S využitím Steinerovy věty určete moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm - volitelné.*

Potřeby: Stojan PHYWE s rotační osou a pružinou, soubor základních geometrických těles (koule, tyč, kotouč, plný válec), siloměr, stopky, měřítko.

1. OBECNÁ ČÁST

1.1 Moment setrvačnosti

Mírou setrvačnosti rotujícího tělesa je **moment setrvačnosti J** . Ten závisí na hmotnosti tělesa a na jejím rozložení, tj vzdálenosti, vůči rotační ose. Je-li rozložení látky v tělese spojitě, je moment setrvačnosti J definován vztahem

$$J = \int r^2 \cdot dm \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad , \quad (1)$$

kde dm je hmotnost elementu hmoty tělesa, r je vzdálenost elementu dm od osy rotace. Výsledky řešení tohoto integrálu pro tělesa jednoduchých geometrických tvarů jsou tabelovány.

Na rozdíl od hmotnosti m , která je mírou setrvačnosti tělesa při translačním pohybu, není moment setrvačnosti tělesa jednoznačně přiřazen, ale obecně závisí na tvaru tělesa, na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení. Nejmenší moment setrvačnosti J_0 přísluší ose, která prochází těžištěm.

Pokud těleso nemá pravidelný tvar a konstantní hustotu, je výpočet momentu setrvačnosti komplikovaný a zpravidla je třeba jej určit měřením.

K měření momentu setrvačnosti je možné využít **torzní kmity** zkoumaného tělesa, nejlépe kolem osy procházející jeho těžištěm. V našem případě používáme kmity tělesa na ose upevněné na šroubovitou zkrutnou pružinu. Tato pružina vyvozuje při vychýlení z rovnovážné polohy vratný silový moment M , jehož velikost je dána rovnicí

$$M = F \cdot p = -D \cdot \varphi \quad (\text{Nm}), \quad (2)$$

kde p je rameno síly, F je síla působící kolmo k ramenu síly a D [N.m/rad] je tzv. směrný moment pružiny (event. torzní konstanta, torzní tuhost, momentová (úhlová) tuhost pružiny), tj. moment síly potřebný k pootočení tělesa na zkrutné pružině o 1 rad. V rozsahu platnosti Hookova zákona je tedy stočení pružiny přímo úměrné silovému momentu, což je výhodné pro experimentální stanovení směrného momentu D .

Po vychýlení z rovnovážné polohy začne těleso torzně kmitat rychlostí odpovídající jeho momentu setrvačnosti a direkčnímu momentu pružiny. Pro dobu kmitu (periodu) platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad (\text{s}) \quad . \quad (3)$$

Z této rovnice lze po změření doby kmitu určit moment setrvačnosti vyšetřovaného tělesa.

1.2. Steinerova věta

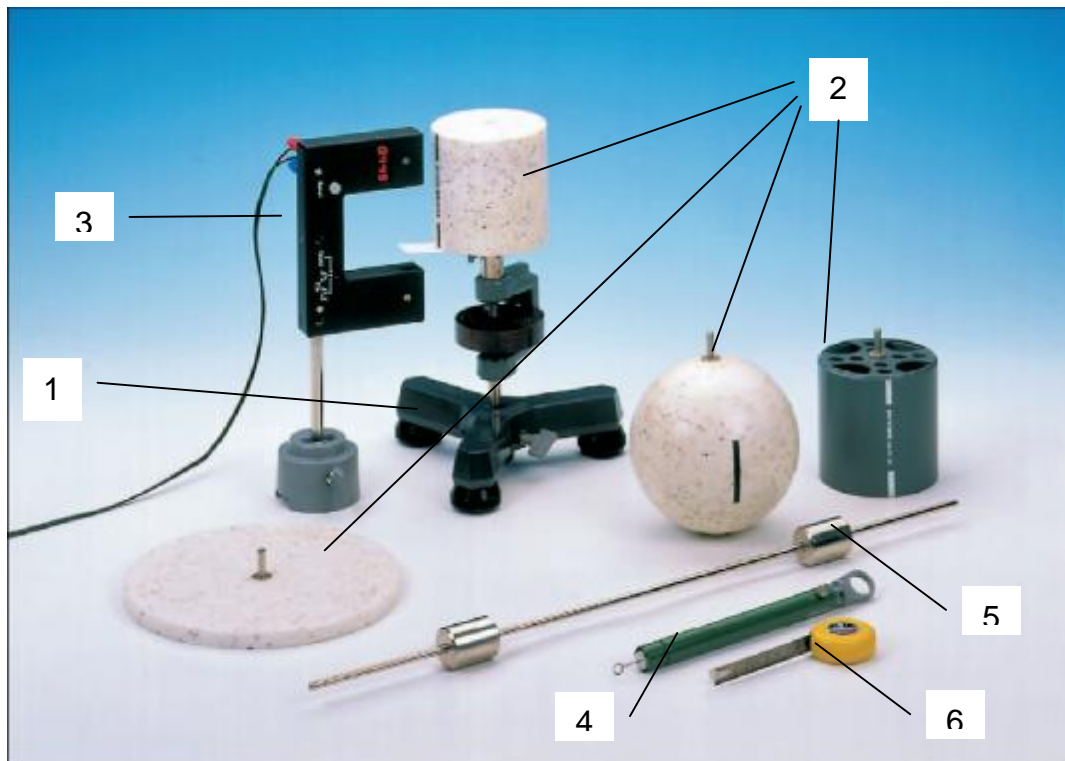
Tato věta umožňuje vypočítat **moment setrvačnosti tělesa J vzhledem k určité ose**, známe-li moment setrvačnosti J_0 téhož tělesa vzhledem k ose rovnoběžné a procházející těžištěm tělesa. Platí

$$J = J_0 + m \cdot a^2 \quad , \quad (4)$$

kde a je vzdálenost obou os a m je celková hmotnost tělesa.

2. Postup měření

Sestava pro experimentální určení momentu setrvačnosti tuhých těles je tvořena komponenty firmy PHYWE dle obr.1:



Obr.1 Stojan PHYWE s příslušenstvím. 1 – stojan s pružinou a rotační osou s uchycením, 2 – různá tělesa (válec, koule, disk), 3 světelná závora s čítačem, 4 – siloměr, 5 – tyč s posuvnými závažími, 6 – měřicí pásma .

2.1. Měření direkčního momentu D

- 1) Upevněte do stojanu 1 (obr. 1) tyč se závažími symetricky umístěnými poblíž středu otáčení. Podle potřeby upravte svislý směr osy otáčení šrouby v trojnožce stojanu.
- 2) Tyč pootočte postupně o úhly $\varphi = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ a 450° , a v definované vzdálenosti p od osy otáčení změřte pomocí pružinového siloměru příslušnou sílu F potřebnou na pootočení. Během měření musí být siloměr orientován kolmo k tyči! Stejně měření proveďte vždy i pro opačný smysl otáčení.

(Tyč neotáčet o více než 540° !!!)

- 3) Vypočítejte velikost momentů síly $M = F \cdot p$ a sestrojte jejich závislost na odpovídajících úhlech pootočení φ . Závislost proložte regresní přímkou a vyhodnoťte s přihlédnutím k rovnici (2). Zjištěnou hodnotu direkčního momentu D použijte při dalších výpočtech.

2.2. Měření doby kmitu

- 1) Upevněte do stojanu 1 (obr. 1) vyšetřované těleso určené učitelem a upevněte aretovacím šroubem pevně k ose. Podle potřeby upravte svislý směr osy otáčení šrouby v trojnožce stojanu.
- 2) Přiložte stojan se světelnou závorou a čítačem 3 k tělesu tak, aby jeho značka (se šířkou menší než 3 mm) mohla mezi nastavci volně procházet a přitom protínala paprsek vysílače vůči detektoru při průchodu tělesa (obr. 1).
- 3) Připojte světelnou závoru ke zdroji a přepínač dejte do polohy $\neg \surd \neg \surd \neg \surd \neg \surd$ a v případě potřeby vynulujte počítadlo – červený displej v těle závory (3, obr. 1), stiskem tlačítka na jeho boku.
- 4) Vychyľte těleso o jistý úhel ($<180^\circ$) a stiskněte šedé tlačítka na světelné závoře – na displeji se objeví řada teček. Těleso uvolněte, nechte prokmitnout a odečtěte na displeji dobu kmitu T . Měření opakujte 5x a pro výpočet momentu setrvačnosti J_{exp} podle rovnice (3) použijte průměrnou hodnotu T .
- 5) Opakujte měření s dalšími tělesy dle úmluvy s učitelem.

Výpočet teoretické hodnoty momentu setrvačnosti

Pro výpočet momentu setrvačnosti pravidelných homogenních těles rotujících kolem těžiště platí rovnice

$$J = k \cdot m \cdot r^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad , \quad (5)$$

kde r je charakteristický rozměr (např. poloměr) tělesa, m je hmotnost tělesa (kg) a konstanta k je tabelována (např. v Matematicko-fyzikálních tabulkách). Změřte a zvažte zkoumaná tělesa a vypočtenou hodnotu J_{teor} dle rovnice (5) porovnejte s naměřenou hodnotou J_{exp} .

2.3. Ověření Steinerovy věty

K experimentálnímu ověření Steinerovy věty použijte kotouč s otvory různě vzdálenými od jeho osy (obr. 2). Měření doby kmitu provedeme stejným způsobem jako v předchozím případě, ale pro různou vzdálenost osy otáčení a od středu kotouče.



Obr. 2. Měření doby kmitu pro ověření Steinerovy věty.

Kombinací rovnic (3) a (4) lze odvodit vztah mezi dobou kmitu T a vzdáleností a

$$T^2 = \frac{4p^2}{D} \cdot (J_0 + m \cdot a^2) \quad .$$

Pomocí něho ověříme Steinerovu větu tak, že závislostí $T^2 = f(a^2)$ proložíme regresní přímku a odečteme hodnotu T^2 pro $a = 0$. S pomocí této hodnoty pak vypočteme hodnotu J_0 a porovnáme ji s hodnotami naměřenými a vypočtenými podle rovnic (3) a (5).

2.4. Výpočet poloměru setrvačnosti (gyračního poloměru)

Poloměrem setrvačnosti rozumíme vzdálenost R , v níž by musela být soustředěna veškerá hmotnost tělesa M , aby měla stejný moment setrvačnosti jako těleso vzhledem k téže ose. Platí

$$R = \sqrt{\frac{J}{M}}$$

Vypočítejte poloměr setrvačnosti pro všechna změřená tělesa.